

[TSME, Matur BDE, 1991]

Gegeben sind der Kreis $k: x^2+y^2+6x-4y+4=0$ und die Gerade $g: 4x-3y-32=0$.

- a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises k .
 - b) Wie gross ist der kürzeste Abstand zwischen der Geraden g und dem Kreis k ? Welcher Punkt von g liegt dem Kreis am nächsten?
 - c) Der Kreis k sei der Schnittkreis einer Kugel mit der xy -Ebene. Diese Kugel habe den Radius 5. Bestimmen Sie ihren Mittelpunkt
 - d) Wie lauten die Gleichungen der Tangentialebenen an diese Kugel in den Punkten $(0|2|z)$ der Kugel?
-

a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = -4 + 9 + 4 = 9$ $M(-3 | 2), r = 3$

b) Lot von M auf g : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ein zu g senkrechter Vektor (Normalenvektor)!

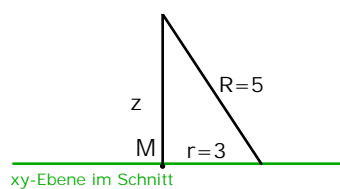
Schnitt mit g :

$F(5 | -4)$ ist derjenige Punkt auf g , der k am nächsten liegt.

Abstand des Mittelpunktes von g : $d = \left| \frac{4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 - 32}{5} \right| = 10$

Der kürzeste Abstand zwischen Kreis und Gerade ist: $d - r = 10 - 3 = 7$

c)



$$z^2 = R^2 - r^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow z = \pm 2$$

$$K_1 \text{ mit } M_1(-3 | 2 | 4), \quad K_2 \text{ mit } M_2(-3 | 2 | -4),$$

d) Tangentialebenen an die 1. Kugel:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 25$$

$$(0 + 3)^2 + (2 - 2)^2 + (z - 4)^2 = 25$$

$$(z - 4)^2 = 16$$

$$z = \pm 4 + 4$$

Berührungspunkt	Berührungsradius	Tangentialebene
B (0 2 8)	$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$3x + 4z = 32$
B (0 2 0)	$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	$3x - 4y = 0$

Tangentialebenen an die 2. Kugel:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25$$

$$(0 + 3)^2 + (2 - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25$$

$$(z + 4)^2 = 16$$

$$z = \pm 4 - 4$$

Berührungspunkt	Berührungsradius	Tangentialebene
B (0 2 0)	$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$3x + 4z = 0$
B (0 2 -8)	$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	$3x - 4y = 32$