

[TSME, Matur BDE, 1993]

Welche Kugel berührt die Ebene $x-4y+8z=0$ im Koordinatenursprung und geht durch den Punkt $P(3|0|-1)$?

Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf der Normalen zur Ebene durch den Ursprung:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die Mittelpunkte aller Kreise, die durch die Punkte P und den Ursprung gehen liegen auf der Symmetrieebene der beiden Punkte:

$$\text{Ebene normal zu } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ durch } M_{OP} = (1.5 | 0 | -0.5) : \quad E: \quad 3x - z = 5$$

Schnitt von E und g ergibt den Mittelpunkt:

$$3 \cdot (t) - (8t) = 5 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad M(-1 | 4 | -8)$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 + 16 + 64 = 81$$

$$\text{Kugelgleichung: } (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 8)^2 = 81$$