

Alle Ergebnisse sind exakt anzugeben!

- a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)=\ln(x^2+0.25)$.
(Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen)
- b) Geben Sie die Gleichung einer Wendetangente an.
- c) Bestimmen Sie in der Funktion $f(x)=\ln(ax^2+b)$ die Parameter a und b so, dass die Funktion bei $x=1$ und $y=-\ln 5$ die Achsen schneidet.
[Matur TSME 2001, Flü]
-

a) $f(x) = \ln(x^2 + 0.25)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 0.25} \cdot 2x = \frac{8x}{4x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{8(4x^2 + 1) - 8x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{8(1 - 4x^2)}{(4x^2 + 1)^2}$$

Überall definiert ($x^2 \geq 0$): $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x^2 + 0.25 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow P\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \mid 0\right)$

Extremum: $(0 \mid \ln 0.25) = (0 \mid -\ln 4)$

\Rightarrow Wendepunkte: $1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow (\pm 0.5 \mid -\ln 2)$

Verhalten im Unendlichen: $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

- b) Die Steigung in $(0.5 \mid -\ln 2)$ ist: $f'(0.5) = 2$:

$$y + \ln 2 = 2(x - 0.5) \Rightarrow y = 2x - 1 - \ln 2$$

c) $\begin{matrix} x = 1 & y = 0 \\ y = 0 & y = -\ln 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \ln(a + b) \\ -\ln 5 = \ln b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 0.2 \end{cases} \Rightarrow a = 0.8$

$$y = \ln(0.8x^2 + 0.2) = \ln\left(\frac{4x^2 + 1}{5}\right)$$