

## Aufgabe 11

- a) Alle Punkte, die von A und B denselben Abstand haben, liegen auf der mittelsenkrechten Ebene von A und B:

$$\vec{n} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad M_{AB} (-1|0|5) \quad \text{Ebene: } 5x - 5y - z = -10$$

Da auch  $M \in g$  sein muss, ist der Schnittpunkt zu berechnen:

$$5(8+8t) - 5(-2-4t) - (1+t) + 10 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(0|2|0)$$

$$\text{Radius: } \overline{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9$$

- b) Die Tangentialebenen stehen senkrecht auf den Berührungsradien:

$$\text{Normalenvektoren: } \overline{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overline{BM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -24 - 21 + 24 = -21 = 9 \cdot 9 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \left| -\frac{21}{81} \right| \Rightarrow \alpha = 75.0^\circ$$

- c) Der Richtungsvektor der Geraden  $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  hat gerade die gleiche Länge wie der Radius.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ergibt die beiden Punkte: } P(-8|6|-1), Q(8|-2|1)$$

Das Volumen lässt sich mit dem Spatprodukt berechnen:

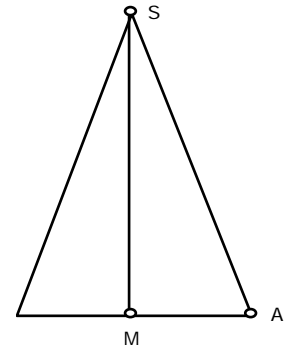
$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \overline{AQ} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AP} = \begin{pmatrix} 72 \\ 74 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 72 \\ 74 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = 540$$

$$V = \frac{540}{6} = 90$$

## Aufgabe 12

$$\overline{MS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 3, \quad \overline{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 6$$



- a) Normal zu  $\overline{MS}$ , durch M (oder A): E:  $2x - y - 2z = -6$

- b) Wie üblich mit dem Skalarprodukt; hier zur Abwechslung mit Trigonometrie:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 63.43^\circ \Rightarrow \alpha = 126.9^\circ$$

- c)  $\overline{MA'}$  liegt in der Ebene E, steht also senkrecht auf  $\overline{MS}$ ;  
 $\overline{MA'}$  ist ausserdem rechtwinklig zu  $\overline{MA}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MA'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{MA' muss gleich lang sein wie MA})$$

$$\text{Aus } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A'_1 (5|8|4) \\ A'_2 (-3|0|0) \end{matrix}$$

- d) Die Höhe dieses Kegels muss 6 sein und die Spitze auf der x-Achse, in  $(x|0|0)$  liegen:

$$\text{HNF: } \frac{2x - 0 - 0 + 6}{3} = \pm 6 \Rightarrow x_1 = 6, \quad x_2 = 12 \Rightarrow (6|0|0), \quad (-12|0|0)$$

### Aufgabe 13

a)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  sind in der Ebene liegende Vektoren;  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

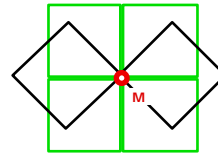
Als Ebenengleichung erhalten wir: E:  $2x + y - 2z = 0$

b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 = 3 \cdot 1 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 48.2^\circ$

Schnitt mit der yz-Ebene:  $x = 4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A(0|2|1)$

Schnitt mit der xz-Ebene:  $y = -2 + 2t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow B(2|0|2)$

c) Die Normalebene durch die Mitte M von AB ergibt die gezeichnete Schnittfigur



d)  $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; Länge: 3

Der Mittelpunkt von AB ist:  $(1|1|1.5)$

Wir benötigen eine Richtung in E, also rechtwinklig zu  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und rechtwinklig zu  $\overline{AB}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ auch dieser Vektor hat die Länge 3.}$$

Damit erhalten wir die Punkte:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1|4|3) \\ (-1|0|-1) \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (3|2|4) \\ (1|-2|0) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1.5|2|2.5) \\ (0.5|0|0.5) \end{matrix}$$

## Aufgabe 14

$$a) \quad S\left(\frac{9+0+0}{3} \mid \frac{0+6+0}{3} \mid \frac{0+0+3}{3}\right) = S(3|2|1)$$

$$b) \quad \vec{n}_{ABC} = \vec{BA} \times \vec{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{ABO} = \vec{BA} \times \vec{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} = 54 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Anschaulich auch direkt erhältlich.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 = 7 \cdot 1 \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 31.0^\circ$$

c) Die ersten drei Teilflächen liegen in den Koordinatenebenen:

$$\text{AOC:} \quad F_1 = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13.5$$

$$\text{BOC:} \quad F_2 = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

$$\text{AOB:} \quad F_3 = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27$$

$$\text{ABC:} \quad \vec{BA} \times \vec{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_4 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = 31.5$$

Die Oberfläche ist also:  $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 81$

d) Der Inkreismittelpunkt liegt im Schnittpunkt der vier winkelhalbierenden Ebenen. Die ersten drei gewinnt man am besten aus der Anschauung: es sind die winkelhalbierenden Ebenen des 1. Quadranten:

$$\text{von AOC und BOC:} \quad x - y = 0$$

$$\text{von AOC und AOB:} \quad y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z, \quad \text{der Punkt liegt auf der} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{von BOC und A=B:} \quad x - z = 0$$

$$\text{von BOC und A=B:} \quad \text{HNF:} \quad \frac{2t + 3t + 6t - 18}{7} = \pm \frac{t}{1} \quad \Rightarrow \quad 11t - 6t = 18$$

$t = 4.5$  ergibt einen Punkt ausserhalb des Tetraeders (Mittelpunkt einer Ankugel)

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad M(1|1|1)$$

## Aufgabe 15

a) Achse AB:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

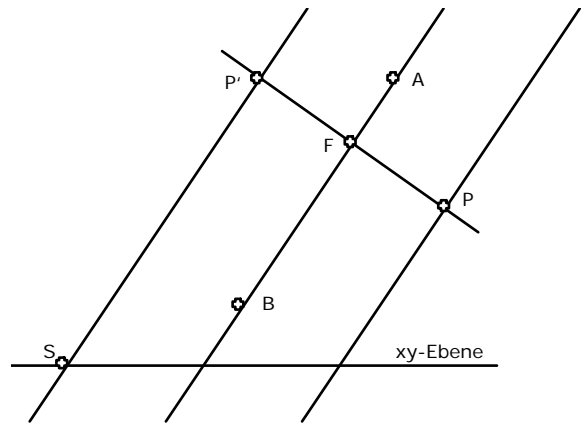
Ebene senkrecht zur Achse durch P:  
 $2x + 2y + 3z = 3$

Schnitt mit der Achse:

$$2(4 + 2t) + 2(2t) + 3(2 + 3t) = 3$$

$$t = -1 \Rightarrow F(2|-2|-1)$$

Radius:  $\overline{FP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 7$



b) P wird an der Zylinderachse gespiegelt:

P' erhält man aus:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-1|4|-3)$

Mantellinie durch P':  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene für:  $z = -3 + 3t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow S(1|6|0)$

c) Die Normale der Tangentialebene ist der Berührungsradius:

$$\vec{n}_{xy} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 = 1 \cdot 7 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 73.4^\circ$$