Aufgabe 21

a) Gleichung der Geraden AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(14-2t|2t|8+t)$ sind die Koordinaten der Ecke P.

Der Quader hat die Kantenlängen $14-2t$, $2t$ und $8+t$

$V = 2t(14-2t)(8+2t) = -4t^3 - 4t^2 + 224t$

Extremwert für: $V' = -12t^2 - 8t + 224 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4, \quad t_2 = -\frac{14}{3}$

Für $t = 4$ erhalten wir den Punkt $P(6|8|12)$, der auf der Strecke AB liegt: $V = 576$

Es handelt sich tatsächlich um ein Maximum:

vorher: $V'(3) > 0$ die Kurve steigt.
nachher: $V'(6) < 0$ die Kurve fällt.

b) Für t_2 erhalten wir den Punkt $P'(\frac{70}{3}|-\frac{28}{3}|\frac{10}{3})$

Das dazugehörende Volumen ist aber ein relatives Minimum:

vorher: $V'(-5) < 0$ die Kurve fällt.
nachher: $V'(-4) > 0$ die Kurve steigt.

Aufgabe 22

Ecke $C(7-t|1|1+t)$

Vektoren der Seiten a und b: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-t \\ -1 \\ 1+t \end{pmatrix}$

Die Fläche wird mit dem Vektorprodukt berechnet: $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1(1+t)+1 \\ (5-t)+(1+t) \\ 1+(5-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 6 \\ 6-t \end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich für das Quadrat der Fläche:

$$F^2 = t^2 + 36 + (6-t)^2 = 2t^2 - 12t + 72$$

Extremwert für:

$$F^{2\prime} = 4t - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \text{ und } C(4|1|4)$$

Es handelt sich tatsächlich um ein Minimum:

vorher: $F^{2\prime}(2) < 0$ die Kurve fällt.

nachher: $F^{2\prime}(4) > 0$ die Kurve steigt.

Aufgabe 23

$A(-5|3|-6)$ und $X(-5+2t|3-t|-6+2t)$ sind Punkte der Geraden.

a) Die Vektoren $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden g bilden ein Parallelogramm mit der Grundlinie $|\vec{v}| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Dessen Fläche berechnet sich aus dem Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Fläche: } F = 6 \cdot 3 = 18$$

Die Höhe dieses Parallelogramms entspricht dem Abstand $d = \frac{18}{3} = 6$

b) $\overrightarrow{PX}$ soll senkrecht auf g stehen:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -10+2t \\ -1-t \\ -4+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(-10+2t) - (-1-t) + 2(-4+2t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

Der Abstand d ergibt sich aus dem Betrag von $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{16+16+4} = 6$

c) Die Vektoren $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AX}$ und $\overrightarrow{PX}$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP}^2 = 100 + 1 + 16 = 117$$

$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AX}^2 = 4t^2 + t^2 + 4t^2 = 9t^2$$

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -10+2t \\ -1-t \\ -4+2t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PX}^2 = (-10+2t)^2 + (-1-t)^2 + (-4+2t)^2$$

$$\begin{aligned} &= 4t^2 - 40t + 100 \\ &\quad\; t^2 + 2t + 1 \\ &\quad\; 4t^2 - 16t + 16 \\ \hline &= 9t^2 - -16t + 117 \end{aligned}$$

Der Satz des Pythagoras ergibt die Gleichung:

$$117 = 9t^2 + 9t^2 - 54t + 117 \quad \Rightarrow \quad 18t^2 - 54t = 18t(t-3) = 0$$

$t_1 = 3, \quad t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ für $t_1 = 3$: $\quad \left|\overrightarrow{PX}\right| = d = 6$

d) Normalebene zu g durch P: $2x - y + 2z = 2$

Schnitt mit der Geraden g:

$$2(2t-5) - (3-t) + 2(2t-6) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

Der Schnittpunkt ist $X(1|0|0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der Länge $\sqrt{16+16+4} = 6$

e) Es sei d die Länge von $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 2t-10 \\ -1-t \\ 2t-4 \end{pmatrix}$

$$d^2 = \left|\overrightarrow{PX}\right| = 9t^2 - 54t + 117 \quad \text{(siehe Aufgabe c)}$$

$$d^{2\prime} = 18t - 54 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad d = 6 \quad \text{(siehe Aufgabe d)}$$

vorher: $d^{2\prime}(2) < 0$ die Kurve fällt

nachher: $d^{2\prime}(4) > 0$ die Kurve steigt - es ist ein Minimum

Aufgabe 24

a) $P \in g: \quad P\,(-2+3t|7-2t|6)$

$Q \in h: \quad Q\,(3-3s|10+4s|1+s) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-3s-3t \\ 5+4s+2t \\ -5+s \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}$ muss senkrecht auf der Geraden h stehen:

$$\begin{pmatrix} 5-3s-3t \\ 3+4s+2t \\ -5+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\,(5-3s-3t) + 4\,(3+4s+2t) + (-5+s)$$

$$= -8 + 26s + 17t = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{8-17t}{26}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-3\cdot\frac{8-17t}{26}-3t \\ 3+4\cdot\frac{8-17t}{26}+2t \\ -5+\frac{8-17t}{26} \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix} 130-3\,(8-17t)-78t \\ 78+4\,(8-17t)+52t \\ -130+4\,(8-17t) \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix} 106-27t \\ 110-16t \\ -122-17t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 106-27t \\ 110-16t \\ -122-17t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} (106-27t)^2 &= 11236 - 5724t + 729t^2 \\ (110-16t)^2 &= 12100 - 3520t + 256t^2 \\ (-122-17t)^2 &= 14884 + 4148t + 289t^2 \\ \hline & 38220 - 5096t + 1274t^2 \end{aligned}$$

$$\overline{PO}^2 = \frac{38220-5096t+1274t^2}{26^2} = \frac{1470-196t+49t^2}{26} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{\sqrt{26}}\sqrt{1470-196t+49t^2}$$

b) Wir bilden die Ableitung des Quadrates von d:

$$d^{2\prime} = \frac{1}{26}(98t-196) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{1274}{26}} = \sqrt{49} = 7$$

vorher: $d^{2\prime}(1) < 0$ die Kurve fällt

nachher: $d^{2\prime}(3) > 0$ die Kurve steigt - es ist ein Minimum

c) $d = \frac{1}{\sqrt{26}}\sqrt{1470-196t+49t^2} = 7$ (Für $t = 2$)

d) Es ist: $P(4|3|6)$ und - mit $s = \frac{8-17t}{26} = -13$ - $Q(6|6|0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Winkel mit g: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 6 + 0 = 0$ rechtwinklig

Winkel mit h: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 + 12 - 6 = 0$ rechtwinklig

e) Die Ebenen werden durch die Richtungsvektoren der beiden Ebenen bestimmt.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $(-2|7|6)$ ergibt die eine Parallelebene: $2x + 3y - 6z = -19$

Einsetzen von $(3|10|1)$ ergibt die andere Parallelebene: $2x + 3y - 6z = 30$

Der Abstand der windschiefen Geraden ist gleich dem Abstand der beiden Parallelebenen und liesse sich beispielsweise aus dem Abstand des Punktes $(3|10|1)$ von der Ebene $2x + 3y - 6z = -19$ berechnen:

$$\text{HNF: } \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 - 6 \cdot 1 + 19}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{49}{7} = 7$$

Beachten Sie auch die Möglichkeit, den Abstand mit Hilfe des Spatprodukts zu berechen:

Grundfläche: aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ergibt sich. $G = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

Das Spatvolumen ist: $V = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 10 + 9 + 30 = 49$

(Dabei ist: $\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Verbindungsvektor der Geraden.)

Es ergibt sich für d als Höhe des Spats: $d = \frac{V}{G} = \frac{49}{7} = 7$

Aufgabe 25

Vorbemerkung: Alle Ergebnisse in dieser Aufgabe sind gerundet. Wenn Sie auf die gleichen Schlussresultate kommen wollen, müssen Sie überall mit den gespeicherten genaueren Zahlen rechnen. Ein Excelblatt ist nützlich!

a) Entspricht dem Abstand des Punktes A_1 vom Ursprung:

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2} = 18.558\,\text{km}$$

b) Winkel zwischen der Geraden und der xy-Ebene:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_2^2} \cdot 1 \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_2^2}}\right) = 3.18°$$

c) Schnitt der Geraden mit der xy-Ebene:

$$z = a_3 + t \cdot v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{a_3}{v_3} = \frac{1}{15}\,\text{h} = 4\,\text{Min}$$

Landepunkt: $\left(a_1 - \frac{a_3 v_1}{v_3} \middle| a_2 - \frac{a_3 v_2}{v_3} \middle| 0\right) = (1|2|0)$

d) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 270\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

e) Bremszeit: $t = \frac{v}{a} = 270\,\frac{\text{km}}{\text{h}} : 1.875\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 75\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} : 1.875\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 40\,\text{sec}$

Bremsweg: $s = \frac{1}{2} a t^2 = 1500\,\text{m}$

f) Es muss der kleinste Abstand der beiden windschiefen Geraden zur kritischen Zeit t berechnet werden:

Die Geschwindigkeit des Sportflugzeuges teilt sich auf in die Komponenten $\begin{pmatrix} -w \\ -w \\ 0 \end{pmatrix}$

Dabei ist $w^2 + w^2 = 215^2 \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{215}{\sqrt{2}} \approx 152\ \text{km/h}$

$F_1\,(a_1 + v_1 t | a_2 + v_2 t | a_3) = (-13.4 + 216t | 12.8 - 162t | 1 - 15t)$
$F_2\,(b_1 - wt | b_2 - wt | b_3) = (2.5 - 152t | 12.4 - 152t | 0.4)$

$\overrightarrow{F_2F_1} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 t \\ c_2 + d_2 t \\ c_3 + d_3 t \end{pmatrix}$ mit: $\begin{matrix} c_1 = a_1 - b_1 \\ c_2 = a_2 - b_2 \\ c_1 = a_3 - b_3 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} d_1 = v_1 + w \\ d_2 = v_2 + w \\ d_1 = v_3 - 0 \end{matrix}$

Das Quadrat der Entfernung ist nun: $d^2 = (c_1 + d_1 t)^2 + (c_2 + d_2 t)^2 + (c_3 + d_3 t)^2$

Ich leite hier unter Benützung der Kettenregel ab:

$$d^{2\prime} = 2d_1\,(c_1 + d_1 t) + 2d_2\,(c_2 + d_2 t) + 2d_3\,(c_3 + d_3 t) = 0 \qquad | : 2$$
$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \cdot t = 0$$
$$t = -\frac{c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} \approx 0.0432\,\text{h}$$

Einsetzen ergibt:

$F_1\,(-4.070 | 5.802 | 0.352)$
$F_2\,(-4.067 | 5.833 | 0.4)$ $\quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.031 \\ 0.048 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = 57\,\text{m}$

g) Gemeint ist damit der Abstand des Ursprungs von der Fluglinie des Sportflugzeuges:

Normalebene zur Flugbahn durch den Ursprung: $x + y = 0$

Schnitt mit der Flugbahn: $(b_1 - wt) + (b_2 - wt) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{b_1 + b_2}{2w} \approx 0.049$

Daraus berechnet man den Schnittpunkt $S\,(b_1 - wt | b_2 - wt | b_3) = (-4.95 | 4.95 | 0.4)$

Der Abstand des Punktes ist dann 7.012 km