Aufgabe 23

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{DC}$, AB // DC

b) Länge von $DC = c = \sqrt{4+1+4} = 3$

Länge von $AB = a = 5 \cdot c = 15$ Mittellinie $m = \dfrac{3+15}{2} = 9$

c) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E(3|0|3)$

Aufgabe 24

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow T(3|4|3)$

Aufgabe 25

Idee: wir verlängern die Seiten AB und AC so, dass sie gleich lang werden. Nun lässt sich das Dreieck AB'C' zu einem Rhombus ergänzen. Die Diagonale AD ist auch Winkelhalbierende.

Seitenlängen von: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$: $AB = 7$, $AC = 9$

Dann sind $9\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 54 \\ 27 \\ 18 \end{pmatrix}$ und $7\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -56 \\ -7 \\ 28 \end{pmatrix}$ gleich lang $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 54 \\ 27 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -56 \\ -7 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ 46 \end{pmatrix}$

Jedes Vielfache davon hat die Richtung der Winkelhalbierenden, z. B. auch $\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix}$

Aufgabe 26

Ein Punkt in der xy-Ebene hat die Koordinaten $P(x|y|0)$

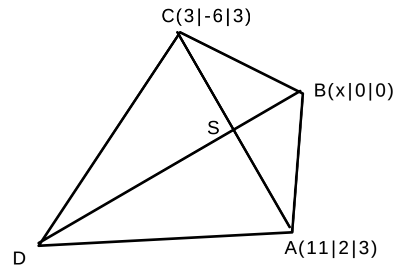
Dann ist: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ 3 \end{pmatrix}$

und es muss gelten: $AP^2 = BP^2$ und $AP^2 = CP^2$, was das folgende Gleichungssystem ergibt:

$$\left| \begin{array}{l} (x+1)^2 + (y-1)^2 + 0 = (x+2)^2 + (y-2)^2 + 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + 0 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + 9 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{r} 2x - 2y + 6 = 0 \\ -6x + \quad + 12 = 0 \end{array} \right|$$

Die Lösungen sind: $x = 2, \quad y = 5$ und $P(2|5|0)$

Aufgabe 27



a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x-11 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} x-3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$

$$(x-11)^2 + 4 + 9 = (x-3)^2 + 36 + 9$$
$$16x = 80 \qquad \Rightarrow \qquad x = 5 \text{ und } B(5|0|0)$$

S ist der Mittelpunkt der Strecke AC: $S(7|-2|3)$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(11|-6|9)$$

b) $f = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$

$e = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{64+64+0} = 8\sqrt{2}$, und damit ist die Fläche: $I = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2}8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{17} = 12\sqrt{34}$

Aufgabe 28

Der Strahl hat die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P(t|t|t)$ und damit ist $\overrightarrow{MP} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t-3 \\ t-4 \end{pmatrix}$

MP muss die Länge $\sqrt{14}$ haben:

$$(t-2)^2 + (t-3)^2 + (t-4)^2 = 14$$
$$3t^2 - 18t + 15 = 0$$
$$t^2 - 6t + 5 = 0$$
$$(t-5)(t-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(5|5|5), \quad P_2(1|1|1)$$