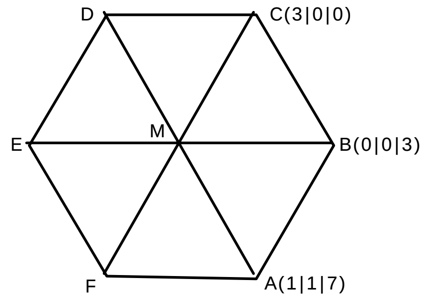
Aufgabe 29



Eine sorgfältige Figur lohnt sich sehr!
Nun sieht man, dass ABCM ein Parallelogramm bilden.

a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(4|1|4)$

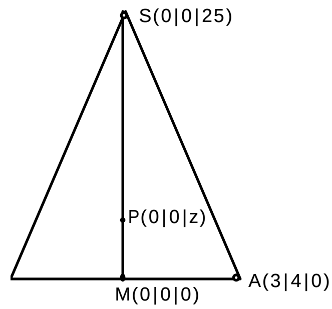
b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(7|1|1)$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(8|2|5)$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(5|2|8)$

Aufgabe 30

Zeichnen Sie eine Schnittfigur, die alle wichtigen Punkte enthält.



a) $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r^2 = MA^2 = 9 + 16 \quad \Rightarrow \quad r = 5$

$V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 25 = \frac{625\pi}{3}$

b) $PS = 25 - z \qquad \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} PA^2 &= PS^2 \\ 9 + 16 + z^2 &= (25 - z)^2 \\ 50z &= 600 \\ z &= 12 \qquad \Rightarrow \quad P(0|0|12) \end{aligned}$$

Aufgabe 31

$\overrightarrow{AB}$ muss parallel zu $\overrightarrow{AC}$ sein (z. B.)

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{AB}$

die Punkte liegen auf einer Geraden.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AC}$ ist nicht parallel zu $\overrightarrow{AB}$

die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

Aufgabe 32

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ (z. B.) müssen komplanar sein,
das heisst, das Gleichungssystem $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AC} + y \cdot \overrightarrow{AB}$ muss lösbar sein.

a) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} 0 &=& 2x - 2y \\ -1 &=& 2x + y \\ -2 &=& 2x + 2y \end{array} \right|$

Die erste Gleichung liefert: $x = y$, was wir in den beiden andern einsetzen: $\left| \begin{array}{rcl} -1 &=& 3x \\ -2 &=& 4x \end{array} \right|$,

dieses System hat keine Lösung, die Punkte sind nicht komplanar, liegen nicht in einer Ebene.

b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} 5 &=& x + y \\ 2 &=& + y \\ -4 &=& -2x + y \end{array} \right|$

Die zweite Gleichung liefert: $y = 2$, was wir in den andern einsetzen: $\left| \begin{array}{rcl} 5 &=& x + 2 \\ -4 &=& -2x + 2 \end{array} \right|$,

dieses System hat die Lösung $x = 3$

Es ist: $\overrightarrow{AD} = 3 \cdot \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, die Punkte sind komplanar, liegen in einer Ebene.