Aufgabe 57

Zuerst den Richtungsvektor berechnen: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Es ginge auch $\overrightarrow{BA}$)

Gleichung der Geraden: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 58

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ schneidet die z-Achse

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ist parallel zur xy-Ebene

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ist parallel zur x-Achse

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ geht durch den Nullpunkt; der fehlende Vektor wäre $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt in der xz-Ebene

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht durch den Ursprung (für $t = -2$)

g) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -5 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ liegt auf der y-Achse

h) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}$ keine spezielle Lage

Aufgabe 59

Die Parametergleichung von g' wäre: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 5 + 2t \end{array} \right| \qquad \text{wir eliminieren t:} \quad 2x - y = 3$$

Aufgabe 60

$S_1 \in xy-\text{Ebene}$	$z = 10 - 5t = 0$	$t = 2$	$S_1\,(1\|3\|0)$
$S_2 \in yz-\text{Ebene}$	$x = 3 - t = 0$	$t = 3$	$S_2\,(0\|4\|-5)$
$S_3 \in xz-\text{Ebene}$	$y = 1 + t = 0$	$t = -1$	$S_3\,(4\|0\|15)$

Aufgabe 61

In der Regel drei.
Nur einer, wenn die Gerade senkrecht auf einer Koordinatenebene steht oder durch den Ursprung geht.
Zwei, wenn die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene verläuft.
Unendlich viele, wenn die Gerade in einer Koordinatenebene liegt.

Aufgabe 62

Richtungsvektor: $\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \,/\!/\, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

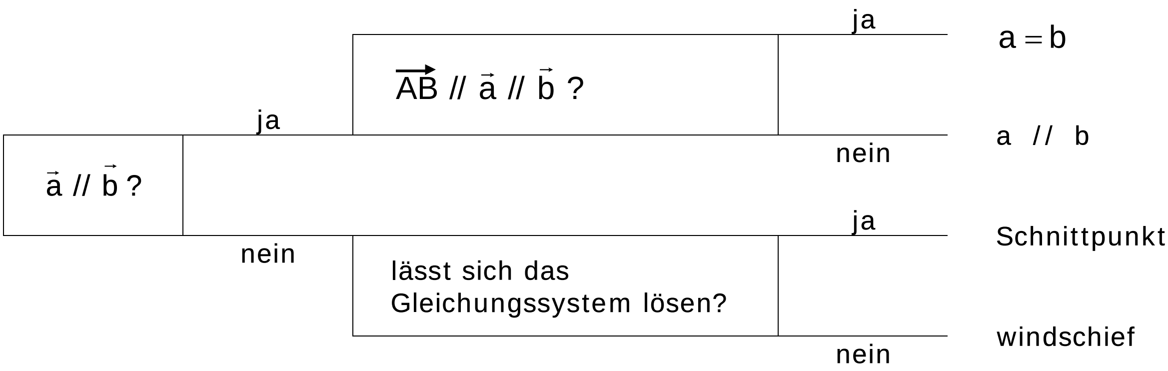
Geradengleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$y = 6 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad S_3(4|0|6)$$

Aufgabe 63

Halten Sie sich an das folgende Schema:

($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die Richtungsvektoren, A und B die Punkte auf der Geraden)



Denken Sie bei der Berechnung von Schnittpunkten daran, dass die Parameter verschieden sein müssen!

a) Die Richtungsvektoren sind parallel: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Verbindungsvektor ist ebenfalls dazu parallel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Die Richtungsvektoren sind nicht parallel;

Versuch einer Schnittpunktberechnung:

$$\left| \begin{array}{l} 0 + 2t = 1 - 3s \\ 0 - t = 1 + s \\ 3 + 4t = 1 + 3s \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 + 2t = 1 - 3s \\ 3 + 4t = 1 + 3s \end{array} \right| \Rightarrow t = -\tfrac{5}{6}, \quad s = -\tfrac{4}{9}$$

stimmt nicht für die nicht benutzte 2. Gleichung, die Geraden sind windschief.

c) Die Richtungsvektoren sind nicht parallel;

$$\left| \begin{array}{r} -1 + t = 4 + 2s \\ 2 + 2t = 9 + s \\ 4 - t = 5 + 4s \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{r} -1 + t = 4 + 2s \\ 4 - t = 5 + 4s \end{array} \right| \Rightarrow s = -1, \quad t = 3$$

Die Zahlen sind auch Lösungen der 2. Gleichung: $S(2|8|1)$

Zwischenwinkel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$, die Geraden stehen senkrecht aufeinander.

d) Die Richtungsvektoren sind parallel: $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

Der Verbindungsvektor ist nicht parallel dazu: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, echt parallele Geraden.

e) Die Richtungsvektoren sind nicht parallel;

$$\left| \begin{array}{ll} 1 + t & = 1 + s \\ 2 & = 2 - s \\ 3 & = 3 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad t = s = 0 \quad \Rightarrow \quad S(1|2|3)$$

(was man schon den Gleichungen ansieht)

Winkel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 45°$

f) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ - parallel

und identisch, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (beide gehen durch den Nullpunkt)

Aufgabe 64

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = 2$

b) Drei Gleichungen für drei Unbekannte:

$$\left| \begin{array}{rl} k - 9 + 2t & = 8 + 4s \\ 0 + \ \ t & = 7 + 2s \\ 1 + \ \ t & = 9 + ks \end{array} \right| \Rightarrow t = 7 + 2s$$

einsetzen in der 1. Gleichung: $k - 9 + 2(7 + 2s) = 8 + 4s \quad \Rightarrow \quad k = 3$
Gibt in der 3. Gleichung: $t - 3s = 8$

Aus $t = 7 + 2s$ und $t - 3s = 8$ berechnet man: $t = 5,\ s = -1$