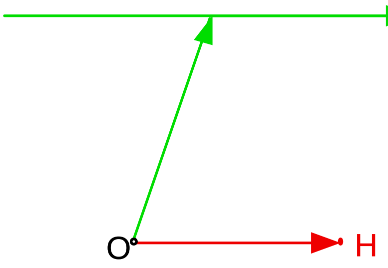
Aufgabe 65

a) $t = 1$ zeigt, dass die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben.
Da $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht parallel sind, handelt es sich um zwei sich schneidende Geraden.

b) Die Geraden gaben gleiche Richtungsvektoren. Da der Vebindungsvektor $(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = \vec{v}$ auch parallel ist sind die Geraden identisch.

c) Auch diese Geraden haben gleiche Richtungsvektoren. Da $\vec{u} - \vec{v}$ nicht parallel zu $\vec{u} \times \vec{v}$ ist, sind die Geraden echt parallel.

d) Die zweite Gerade steht senkrecht zur ersten.



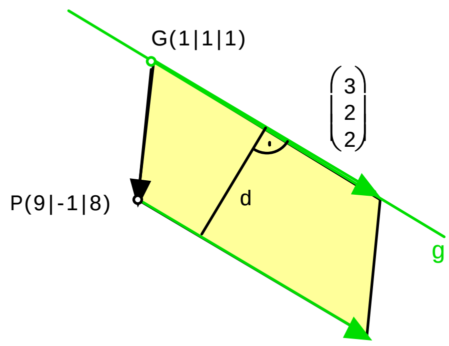
Die zweite Gerade h steht senkrecht auf der Ebene $\vec{u}\vec{v}$ und geht durch den Punkt H.

Aufgabe 66

1. Art

Empfehlenswert, wenn nur der Abstand gesucht wird.

Figur gemäss Zeichnung erstellen!



$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GP} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms: $F = \sqrt{18^2 + 25 + 22^2} = \sqrt{833}$

Grundlinie des Parallelogramms: $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$

Der Abstand ist gleich der Höhe des Parallelogramms: $d = \frac{F}{g} = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = \sqrt{49} = 7$

2. Art

Nur empfehlenswert, wenn auch der Lotfusspunkt F gesucht ist. Andernfalls könnten sich für F sehr unschöne Brüche ergeben.

Der Lotfusspunkt F liegt auf g: $F(1+3t|1+2t|1+2t)$

dann gilt: $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 1+2t \\ 1+2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+3t \\ 2+2t \\ -14+4t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PF}$ muss auf $\begin{pmatrix} -8+3t \\ 2+2t \\ -14+4t \end{pmatrix}$ senkrecht stehen: $\begin{pmatrix} -8+3t \\ 2+2t \\ -14+4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -24+9t+4+4t-14+4t = 0$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt $t = 2$.

$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{4+36+9} = 7$, der Lotfusspunkt ist $F(7|5|5)$.

Aufgabe 67

Wir berechnen den Abstand des Punktes $H(9|5|-5)$ der Geraden h von der Geraden g;

$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fläche des Parallelogramms: $12 \cdot \sqrt{4+4+1} = 12 \cdot 3 = 36$

Grundlinie des Parallelogramms: $\sqrt{4+4+1} = 3$

Abstand der Parallelen: $d = \frac{36}{3} = 12$

(Vergleichen Sie mit Aufgabe 66 1. Art.)

Aufgabe 68

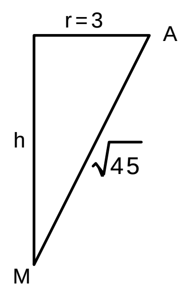
a) Die Zylinderachse a hat die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Radius ist gleich dem Abstand des Punktes A von der Zylinderachse.
Wir benützen wieder die Parallelogramm-Methode der Aufgabe 66.

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Fläche} = \sqrt{9+36+36} = 9$

Grundlinie $g = \sqrt{4+4+1} = 3 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{9}{3} = 3$

b) Die Höhe lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:



$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Länge} = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45}$

$h^2 = 45 - 9 = 36 \quad \Rightarrow \quad h = 6$

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 9 \cdot 6 = 54\pi$

Aufgabe 69

Grundlage: Rhombus; im Rhombus sind die Diagonalen auch Winkelhalbierende.

Wir verlängern $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so, dass sie als gleichlange Seiten eines Rhombus dienen:

$|\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3 \qquad \vec{a}' = 3\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+16+64} = 9$

Richtung der ersten Winkelhalbierenden: $\vec{a}' + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Richtung der zweiten Winkelhalbierenden: $\vec{a}' - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

Gleichungen der Winkelhalbierenden: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Aufgabe 70

a) Die x-Koordinate wird 0: $g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sie stehen senkrecht aufeinander, denn: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0$

b) Wir lösen das Gleichungssystem: $\left| \begin{array}{r} t = 1 - 2s \\ 1 + t = 2 + 2s \end{array} \right| \Rightarrow t = 1 \text{ und } s = 0 \Rightarrow S(0|1|2)$