

Aufgabe 71

Ein Punkt auf g hat die Koordinaten $P(-1-2t|3+2t|2+t)$.

$$\text{Dann ist } \overline{AP} = \begin{pmatrix} -1-2t \\ 3+2t \\ 2+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-2t \\ -1+2t \\ -5+t \end{pmatrix} \text{ und es gilt: } AP^2 = 15^2$$

$$\begin{aligned} (-8-2t)^2 + (-1+2t)^2 + (-5+t)^2 &= 225 \\ (64 + 32t + 4t^2) + (1 - 4t + 4t^2) + (25 - 10t + t^2) &= 225 \\ 9t^2 + 18t - 135 &= 0 \\ t^2 + 2t - 15 &= 0 \end{aligned}$$

$$(t+5)(t-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t_1 = -5 \\ t_2 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} P_1 (9|-7|-3) \\ P_2 (-7|9|5) \end{array}$$

Aufgabe 72

Ein Punkt auf g hat die Koordinaten $P(t|2t|0)$.

$$\text{Dann ist } \overline{AP} = \begin{pmatrix} t-7 \\ 2t-5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{BP} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t-4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

und es muss gelten: $\overline{AP} \perp \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t-7 \\ 2t-5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t-4 \\ -6 \end{pmatrix} &= 0 \\ (t-7)(t+2) + (2t-5)(2t-4) + (-2)(-6) &= 0 \\ (t^2 - 5t - 14) + (4t^2 - 18t + 20) + 12 &= 0 \\ 5t^2 - 23t + 18 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} t_1 = 3.6 & P_1 (3.6|7.2|0) \\ t_2 = 1 & P_2 (1|2|0) \end{array}$$

Aufgabe 73

Ein Punkt auf g hat die Koordinaten $P(3+t|t|2+2t)$.

$$\text{Dann ist } \overline{AP} = \begin{pmatrix} t+2 \\ t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{BP} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t-5 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und es muss gelten: } \frac{1}{2} |\overline{AP} \times \overline{BP}| = 9 \Leftrightarrow |\overline{AP} \times \overline{BP}| = 18$$

$$\overline{AP} \times \overline{BP} = \begin{pmatrix} t+2 \\ t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t-2 \\ t-5 \\ 2t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-1)(2t-1) - (2t+1)(t-5) \\ -((t+2)(2t-1) - (2t+1)(t-2)) \\ (t+2)(t-5) - (t-1)(t-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t+6 \\ -6t \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AP} \times \overline{BP}| = 18 \Leftrightarrow (\overline{AP} \times \overline{BP})^2 = 324$$

$$(6+6t)^2 + (-6t)^2 + 144 = 364$$

$$72t^2 + 72t - 144 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0$$

$$t_1 = -2 \Rightarrow P_1(1|-2|-2)$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow P_2(4|1|-2)$$

Aufgabe 74

$$\text{Richtungsvektor der gesuchten Geraden f: } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad // \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichung von f: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 75

Wenn f Parallel zur xy-Ebene liegt, müssen die z-Werte der beiden Punkte gleich sein:

$$\begin{aligned}6 + 4t &= -6 + 4s \\12 + 4t &= 4s \\s &= t + 3\end{aligned}$$

damit erhalten wir für die Punkte auf h

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + (t + 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 0+6 \\ -6+12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}P_1 \in g: & P_1(-5 - 6t | 4 + 3t | 6 + 4t) \\P_2 \in h: & P_2(6 + t | 6 + 2t | 6 + 4t)\end{aligned} \Rightarrow \overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 11 + 7t \\ 2 - t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2}^2 &= 5^2 \\(11 + 7t)^2 + (2 - t)^2 + 0 &= 25 \\50t^2 + 150t + 100 &= 0 \\t^2 + 3t + 2 &= 0 \\(t + 2)(t + 1) &= 0 \\t_1 &= -2 \\t_2 &= -1\end{aligned}$$

Der Abstand von der xy-Ebene ist $6 + 4t$, also $|-2| = 2$
(Eine Gerade verläuft oberhalb, die andere unterhalb der xy-Ebene.)