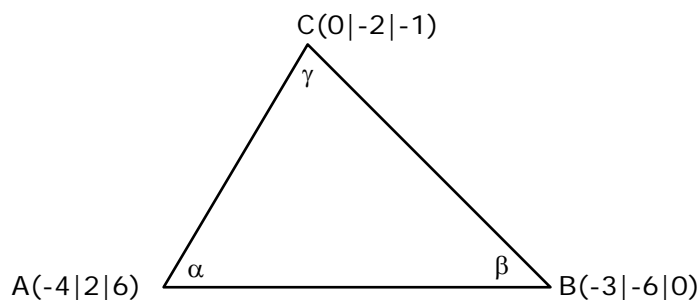


Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks ABC.
 $A(-4|2|6)$, $B(-3|-6|0)$, $C(0|-2|-1)$,

Es gilt:

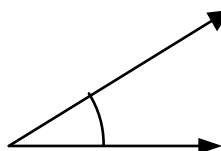
$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} & \vec{BA} &= -\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} & \vec{CA} &= -\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \vec{BC} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{CB} &= -\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Seitenlängen:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{9 + 64 + 1} = \sqrt{74} \\ b &= \sqrt{16 + 16 + 49} = 9 \\ c &= \sqrt{1 + 16 + 36} = \sqrt{53} \end{aligned}$$

Es ist wichtig, dass die Richtung der Vektoren stimmt:
 beide Vektoren müssen ihren Anfangspunkt im Scheitelpunkt des Winkels haben!



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = 4 - 16 + 42 = 30 = 9 \cdot \sqrt{53} \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 62.75^\circ$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 + 32 - 6 = 23 = \sqrt{53} \cdot \sqrt{74} \cdot \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 68.45^\circ$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 + 32 + 7 = 51 = 9 \cdot \sqrt{74} \cdot \cos \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 48.80^\circ$$

Zur Kontrolle können die Winkel addiert werden: $62.75^\circ + 68.45^\circ + 48.80^\circ = 180^\circ$

Besonders Mutige benutzen die Winkelsumme um einen der drei Winkel aus den anderen beiden zu berechnen.