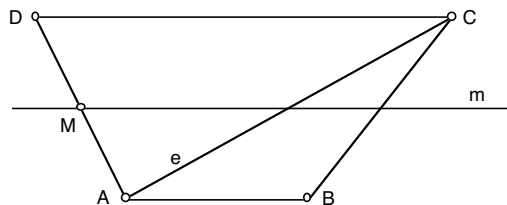


Die Punkte A(0|0|7), B(-2|1|4), C(-8|12|3) und D(0|8|15) sind gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass das Viereck ein Trapez ist.
 b) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt der Mittellinie mit der längeren der beiden Diagonalen?



$$a) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \cdot \vec{AB} = \vec{DC}$$

Zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks sind parallel: Trapez!

- b) Die Mittellinie m geht durch den Mittelpunkt $M = \left(\frac{0+0}{2} \mid \frac{0+8}{2} \mid \frac{7+15}{2} \right) = (0|4|11)$ der Strecke AB

und ist parallel zu \vec{AB} : $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Welche Diagonale ist länger?

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow AC = \sqrt{64 + 144 + 16} = \sqrt{224}$$

AC ist länger.

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow BD = \sqrt{4 + 49 + 121} = \sqrt{173}$$

Gleichung dieser Diagonalen: $e: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← $= -\frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$

Schnittpunkt der Mittellinie m und der Diagonalen e :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} -2t = 2s \\ 4 + t = -3s \\ 11 - 3t = 7 + s \end{array}$$

Achtung! Parameter ändern!

Die 1. Gleichung ergibt: $s = -t$

Eingesetzt in der 2. Gleichung: $4 + t = 3t \Rightarrow t = 2$ und damit $s = -2$

3. Gleichung prüfen: $11 - 6 = 7 - 2$ in Ordnung!

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \mathbf{S(-4|6|5)}.$$