

Gegeben ist die Kugel k mit der Gleichung $k: (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+7)^2 = 161$.

a) Berechnen Sie die Durchstosspunkte der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit

der Kugel k .

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T an die Kugel k im Berührungspunkt $B(4|0|-2)$

c) Die Tangentialebene T schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X , Y und Z .

Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das diese drei Punkte zusammen mit dem Kugelmittelpunkt M bilden.

[TSME, Vorprüfung BDE, 1999]

a) x, y, z aus der Geradengleichung in der Kugelgleichung einsetzen:

$$(8+2t+6)^2 + (8-2t-6)^2 + (8+5t+7)^2 = 161$$

$$(14+2t)^2 + (2-2t)^2 + (15+5t)^2 = 161$$

$$196 + 56t + 4t^2 + 4 - 8t + 4t^2 + 225 + 150t + 25t^2 = 161$$

$$33t^2 + 198t + 264 = 0$$

$$t^2 + 6t + 8 = 0$$

$$(t+2)(t+4) = 0$$

Für $t = -2$ erhalten wir: $S_1(4|12|-2)$

Für $t = -4$ erhalten wir: $S_2(0|16|-12)$

b) Die fehlende Koordinate von B berechnen:

$$(x+6)^2 + (0-6)^2 + (-2+7)^2 = 161$$

$$(x+6)^2 + 36 + 25 = 161$$

$$(x+6)^2 = 100$$

$$x_{1,2} = \pm 10 - 6 \Rightarrow B(4|0|-2)$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$\vec{MB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 10x - 6y + 5z = 40 - 0 - 10 = 30$$

- c) Die Schnittpunkte mit den Achsen ergeben sich am einfachsten aus der Achsenabschnittsform:

$$10x - 6y + 5z = 30 \quad | :30$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 1$$

$$x(3|0|0) \quad y(0|-5|0), \quad z(0|0|6)$$

$$\text{Kantenvektoren: } \vec{MX} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{MY} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{MZ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Pyramidenvolumen:

$$-V = \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 35 \\ -21 \\ -63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{210 + 126 - 819}{6} = \frac{-483}{6} = -80.5$$

$$V = 80.5$$