Die Hessesche Normalenform der Ebene - HNF

Bei der Hesseschen Normalenform der Ebene nimmt man anstelle von $\vec{n}$ den Einheitsvektor $\vec{n}_0$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{hat die Länge} \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

z. B. ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ hat die Länge $\sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$

der Einheitsvektor des Normalenvektors ist: $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ 6/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

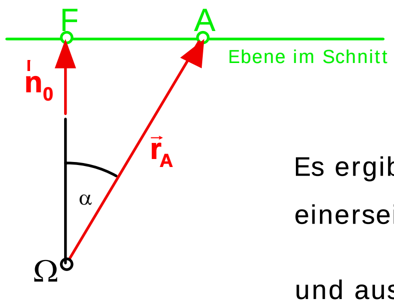
Die Hessesche Normalenform der Ebene $3x - 2y + 6z - 14 = 0$ - kurz HNF - ist:

$$\tfrac{3}{7}x - \tfrac{2}{7}x + \tfrac{6}{7}z - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x - 2y + 6z - 14}{7} = 0$$

Allgemein: die Ebene $ax + by + cz + d = 0$ hat die HNF $\boxed{\dfrac{\mathbf{ax + by + cz + d}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2 + c^2}}} = \mathbf{0}}$

Diese Form benützt man zur Lösung diverser Abstandsaufgaben.

ABSTAND EINER EBENE VOM NULLPUNKT



Es ergibt sich aus der Definition des Skalarprodukts

einerseits: $\vec{n}_0 \cdot \vec{r}_A = 1 \cdot r_A \cdot \cos\alpha$

und aus der Trigonometrie

andererseits: $\frac{\Omega F}{r_A} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \Omega F = r_A \cdot \cos\alpha$

zur Erinnerung: in Vektorschreibweise heisst die Normalenform der Ebenengleichung

$$\vec{n}_0 \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{r}_A \right) = 0$$

$\vec{n}_0 \cdot \vec{r}_A$ ist der konstante Faktor.

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r}_A = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ist der Abstand der Ebene vom Nullpunkt.

Beispiel:

$6x - 9y - 2z + 7 = 0$ hat die Vektorgleichung $\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$

die HNF der Ebene ist: $\frac{6}{11}x - \frac{9}{11}y - \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} = 0$

der Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist $\boxed{d = \frac{7}{11} = \frac{7}{\sqrt{36 + 81 + 4}}}$

Abstand eines Punktes P von einer Ebene

Gesucht ist der Abstand des Punktes $P(x_0 \mid y_0 \mid z_0)$

von der Ebene $E_1\!: \; ax + by + cz + d_1 = 0$:

Wir legen eine Parallelebene zu E_1 durch den Punkt P; sie hat die Gleichung

$$E_2\!: \; ax + by + cz + d_2 = 0 \quad \text{mit:} \;\; ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_2$$

Für die Abstände der beiden Ebenen vom Nullpunkt gilt:

$$q_1 = \frac{d_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Für den Abstand q der beiden Ebenen voneinander und damit auch für den Abstand des Punktes P von der Ebene E_1 ergibt sich damit:

$$q = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{d_1 + ax_0 + by_0 + cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Man beachte die Bedingung für d_2 in der vierten Zeile. Betrag deshalb, weil das Vorzeichen wechselt, wenn der Punkt der auf der anderen Seite der Ebene liegt.

$$\boxed{\mathbf{q = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|}}$$

Anschaulich: wenn man in der HNF einer Ebenengleichung einen Punkt einsetzt, erhält man nicht mehr Null, sondern den Abstand des Punktes von der Ebene.

Die Formel ist im R2 ebenfalls gültig; hier berechnet man den Abstand eines Punktes von einer Geraden $ax + by + c = 0$.

KURZ UND BÜNDIG

Man erhält die HNF (Hessesche Normalenform) der Ebene $6x - 9y - 2z + 7 = 0$ indem man die Gleichung durch die Länge des Normalenvektors dividiert:

$$\frac{6x - 9y - 2z + 7}{\sqrt{36 + 81 + 4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6x - 9y - 2z + 7}{11} = 0$$

Setzt man in der HNF für $(x \mid y \mid z)$ die Koordinaten des Nullpunktes ein, so erhält man den Abstand der Geraden vom Nullpunkt:

$$d_\Omega = \frac{6 \cdot \mathbf{0} - 9 \cdot \mathbf{0} - 2 \cdot \mathbf{0} + 7}{\sqrt{36 + 81 + 4}} = \frac{7}{11}$$

Setzt man in der HNF für $(x \mid y \mid z)$ die Koordinaten des Punktes $P(2 \mid -3 \mid 1)$ ein, so erhält man den Abstand des Punktes P von der Ebene

$$d_P = \frac{6 \cdot \mathbf{2} - 9 \cdot \mathbf{(-3)} - 2 \cdot \mathbf{1} + 7}{\sqrt{36 + 81 + 4}} = \frac{12 + 27 - 2 + 7}{11} = 4$$

Setzt man in der HNF für $(x \mid y \mid z)$ die Koordinaten des Punktes $Q(1 \mid 3 \mid 4)$ ein, so erhält man den Abstand des Punktes Q von der Ebene

$$d_Q = \frac{6 \cdot \mathbf{1} - 9 \cdot \mathbf{3} - 2 \cdot \mathbf{4} + 7}{\sqrt{36 + 81 + 4}} = \frac{6 - 27 - 8 + 7}{11} = -2$$

d_Ω und d_P haben das gleiche Vorzeichen, sie liegen auf der gleichen Seite der Ebene.

d_Ω und d_Q haben verschiedene Vorzeichen, sie liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene.

Abstände gibt man immer mit positiven Zahlen an;
Genauer formuliert:

$$d_Q = \left| -2 \right| = 2$$